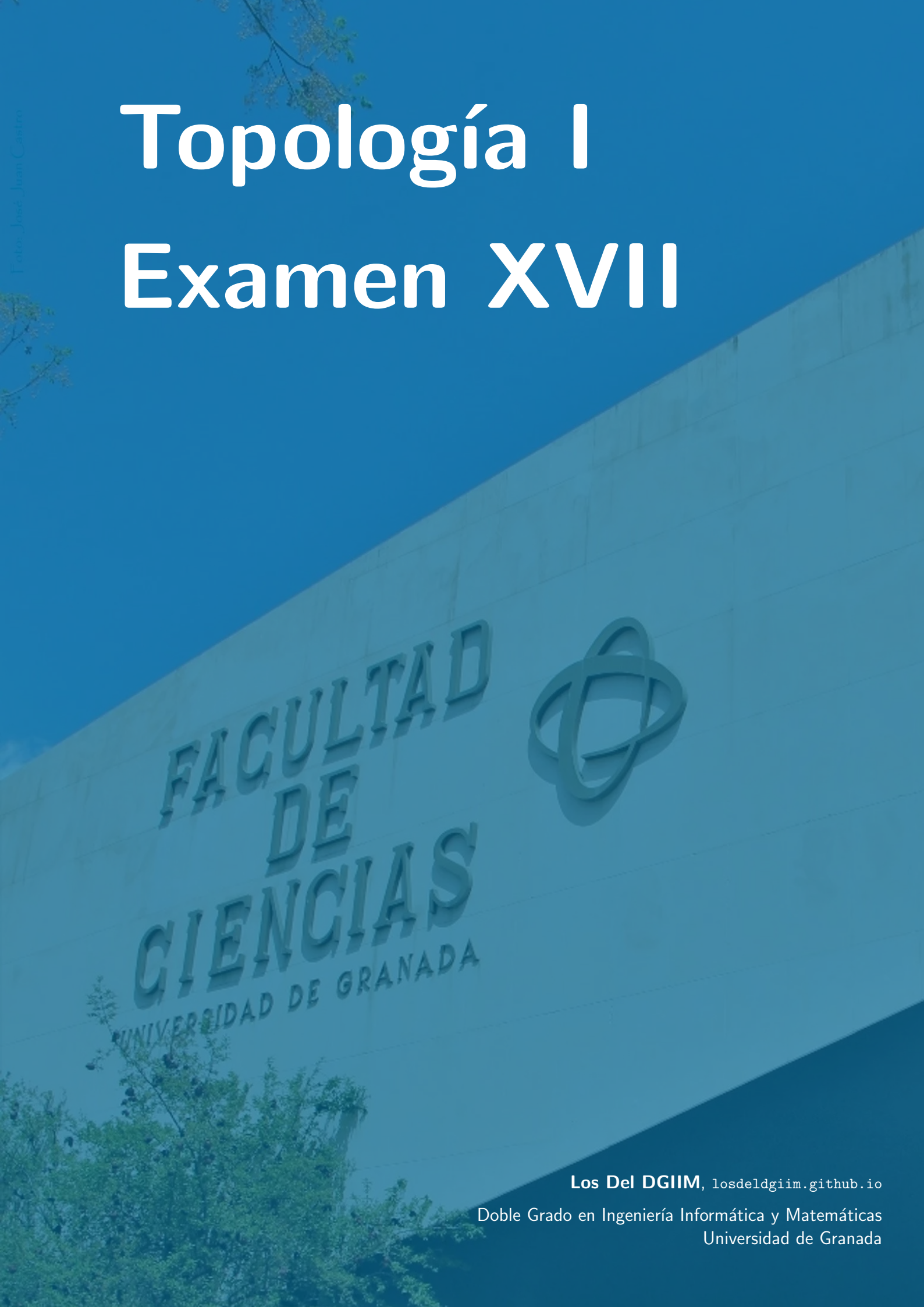
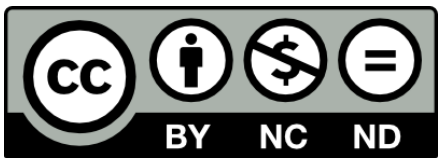
Topología I
Examen XVII



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Topología I
Examen XVII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Lucía Benjumeda Maldonado

Granada, 2026

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2026-27.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo A.

Profesor Ana María Hurtado Cortegana.

Descripción Parcial.

Fecha 18 de noviembre de 2026.

Ejercicio 1. Defina el concepto de *base* de una topología $\mathcal{T}$ sobre un conjunto X. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$ y $A \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Demuestre que la familia

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$$

constituye una base para la topología inducida $\mathcal{T}_A$ sobre A.

Ejercicio 2. En el plano real $\mathbb{R}^2$, considérese la familia de subconjuntos

$$\mathcal{B} = \big\{\{x\} \times [y, +\infty) : x, y \in \mathbb{R}\big\}.$$

Se pide:

a) Demuestre que $\mathcal{B}$ es base de una topología T en $\mathbb{R}^2$.

b) Determine qué rectas del plano $\mathbb{R}^2$ heredan la topología discreta como subespacios topológicos de $(\mathbb{R}^2, T)$.

c) Calcule el interior, la clausura y la frontera en $(\mathbb{R}^2, T)$ de los siguientes subconjuntos:

   i) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

   ii) $Q = \{0\} \times \mathbb{Q}$.

   iii) $H = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

d) Estudie si el espacio topológico $(\mathbb{R}^2, T)$ verifica las propiedades de separación T_1 y T_2 (Hausdorff), así como el primer axioma de numerabilidad (1AN) y el segundo axioma de numerabilidad (2AN).

Ejercicio 1. Defina el concepto de *base* de una topología $\mathcal{T}$ sobre un conjunto X. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$ y $A \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Demuestre que la familia

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$$

constituye una base para la topología inducida $\mathcal{T}_A$ sobre A.

Llamamos *base* de una topología $\mathcal{T}$ sobre un conjunto X a una familia de abiertos $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ (llamados *abiertos básicos*) tal que todo abierto $U \in \mathcal{T}$ puede expresarse como unión de elementos de $\mathcal{B}$; es decir, existe una subfamilia $\{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$U = \bigcup_{i \in I} B_i,$$

o, equivalentemente, para todo $U \in \mathcal{T}$ y todo $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Sea ahora $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$ y $A \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Recordemos que la topología inducida sobre A viene dada por $\mathcal{T}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$. Para probar que $\mathcal{B}_A$ es base de $\mathcal{T}_A$, comprobamos las dos condiciones de la definición:

- $\mathcal{B}_A \subseteq \mathcal{T}_A$: Dado $B \cap A \in \mathcal{B}_A$, como $B \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, por definición de topología inducida se tiene directamente que $B \cap A \in \mathcal{T}_A$.
- Todo abierto de $\mathcal{T}_A$ es unión de elementos de $\mathcal{B}_A$: Sea $V \in \mathcal{T}_A$ arbitrario. Existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $V = U \cap A$. Como $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, podemos escribir $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ con $B_i \in \mathcal{B}$ para cada $i \in I$. Aplicando la distributividad de la intersección respecto de la unión:

  $$V = U \cap A = \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap A = \bigcup_{i \in I} (B_i \cap A).$$

  Como cada término $B_i \cap A$ pertenece a $\mathcal{B}_A$, queda demostrado que $\mathcal{B}_A$ es base de $\mathcal{T}_A$.

Ejercicio 2. En el plano real $\mathbb{R}^2$, considérese la familia de subconjuntos

$$\mathcal{B} = \big\{ \{x\} \times [y, +\infty) : x, y \in \mathbb{R} \big\}.$$

Se pide:

a) Demuestre que $\mathcal{B}$ es base de una topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^2$.

Veamos que la familia $\mathcal{B}$ cumple las dos condiciones caracterizadoras de base:

- Por doble inclusión veremos que $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \mathbb{R}^2$:

  ($\subseteq$) Dado $(x, y) \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, existe $B = \{x\} \times [y_0, +\infty) \in \mathcal{B}$ con $y_0 \leqslant y$ tal que $(x, y) \in B \subseteq \mathbb{R}^2$.

($\supseteq$) Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, basta tomar $B = \{x\} \times [y, +\infty) \in \mathcal{B}$. Se cumple $(x, y) \in B$, luego $(x, y) \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

- Sean $B_1 = \{x_1\} \times [y_1, +\infty)$ y $B_2 = \{x_2\} \times [y_2, +\infty)$ dos elementos de $\mathcal{B}$ y supongamos que $(x, y) \in B_1 \cap B_2$. Entonces $x = x_1 = x_2$ e $y \geqslant \text{máx}(y_1, y_2)$. Tomando $y_3 = \text{máx}(y_1, y_2)$, el conjunto $B_3 = \{x\} \times [y_3, +\infty)$ pertenece a $\mathcal{B}$ y cumple

$$(x, y) \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Por el teorema de caracterización de bases, existe una única topología $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ en $\mathbb{R}^2$ que tiene a $\mathcal{B}$ como base.

b) Determine qué rectas del plano $\mathbb{R}^2$ heredan la topología discreta como subespacios topológicos de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}(\mathcal{B}))$.

Una recta $L \subseteq \mathbb{R}^2$ hereda la topología discreta $\mathcal{T}_{|L}$ si y solo si todo conjunto unitario $\{(x_0, y_0)\} \subseteq L$ es abierto en $\mathcal{T}_{|L}$; es decir, si para cada $(x_0, y_0) \in L$ existe un abierto básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \cap L = \{(x_0, y_0)\}$. Distinguimos dos casos:

- Rectas no verticales: ($L : y = mx + n$, con $m, n \in \mathbb{R}$): Dado $(x_0, y_0) \in L$, elegimos el básico $B = \{x_0\} \times [y_0, +\infty) \in \mathcal{B}$. Como la recta L corta a cada vertical $\{x_0\} \times \mathbb{R}$ en un único punto, se tiene

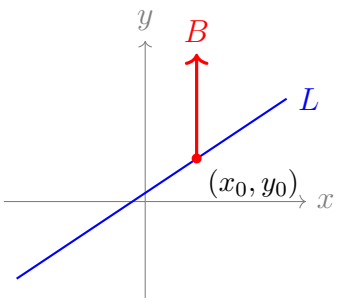
$$B \cap L = \big(\{x_0\} \times [y_0, +\infty)\big) \cap L = \{(x_0, y_0)\}.$$

Por tanto, todos los puntos son abiertos en $\mathcal{T}_{|L}$ y las rectas no verticales sí son discretas.

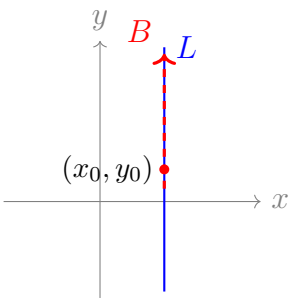
- Rectas verticales ($L = \{x_0\} \times \mathbb{R}$, con $x_0 \in \mathbb{R}$): Para cualquier $(x_0, y_0) \in L$, todo abierto $U \in \mathcal{T}$ que contenga a (x_0, y_0) contiene algún básico $B = \{x_0\} \times [y', +\infty)$ con $y' \leqslant y_0$. Entonces

$$B \cap L = \{x_0\} \times [y', +\infty) = B \neq \{(x_0, y_0)\},$$

ya que contiene infinitos puntos de L por encima de y_0. Así, ningún punto es abierto en L y las rectas verticales no son discretas.



Subespacio discreto



No discreto

c) Calcule el interior, la clausura y la frontera en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ de los siguientes subconjuntos:

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
$D^\circ = \varnothing$.
Dado cualquier $(x, y) \in D$, todo abierto básico que lo contenga es de la forma $B = \{x\} \times [y', +\infty)$ con $y' \leqslant y$. Como B no es acotado superiormente en la segunda coordenada y D sí es acotado, se cumple $B \not\subseteq D$. Luego $(x, y) \notin D^\circ$ y $D^\circ = \varnothing$.

$\overline{D} = D \cup \big((-1, 1) \times (-\infty, 0]\big)$.
Probamos la igualdad por doble inclusión:

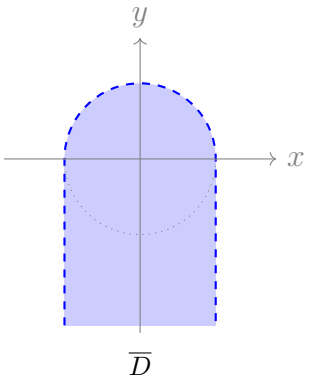
($\supseteq$) Como $D \subseteq \overline{D}$, basta ver que todo $(x, y) \in C \setminus D$ pertenece a $\overline{D}$. Si $(x, y) \in C \setminus D$, entonces $|x| < 1$ e $y \leqslant -\sqrt{1 - x^2} < 0$. Dado cualquier básico $B = \{x\} \times [y', +\infty)$ que contenga a (x, y), se cumple $y' \leqslant y < 0 < \sqrt{1 - x^2}$, por lo que $(x, 0) \in B \cap D \neq \varnothing$. Así, $(x, y) \in \overline{D}$.

($\subseteq$) Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus C$. Distinguimos dos casos:

1) Si $|x| \geqslant 1$, el básico $B = \{x\} \times [y, +\infty)$ contiene a (x, y) y es disjunto con D (pues todo punto de D tiene $|x| < 1$).
2) Si $|x| < 1$ e $y \geqslant \sqrt{1 - x^2}$, el básico $B = \{x\} \times [y, +\infty)$ contiene a (x, y) y cumple $B \cap D = \varnothing$ (pues todos sus puntos satisfacen $x^2 + \tilde{y}^2 \geqslant x^2 + y^2 \geqslant 1$).

En ambos casos $(x, y) \notin \overline{D}$, de donde $\overline{D} \subseteq C$.

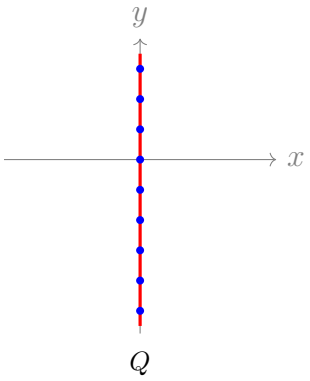
$\partial D = \overline{D} \setminus D^\circ = \overline{D} = D \cup \big((-1, 1) \times (-\infty, 0]\big)$.



b) $Q = \{0\} \times \mathbb{Q}$.
$Q^\circ = \varnothing$.
Sea $(0, q) \in Q$. Cualquier abierto que lo contenga incluye un básico $B = \{0\} \times [y', +\infty)$ con $y' \leqslant q$. Por la densidad de los irracionales en $\mathbb{R}$, existe $p \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [y', +\infty)$, de modo que $(0, p) \in B$ pero $(0, p) \notin Q$. Así, $B \not\subseteq Q$ y $(0, q) \notin Q^\circ$.

$\overline{Q} = \{0\} \times \mathbb{R}$.
Si $x \neq 0$, el básico $B = \{x\} \times [y, +\infty)$ contiene a (x, y) y verifica $B \cap Q = \varnothing$, luego $(x, y) \notin \overline{Q}$. Por el contrario, si $x = 0$, para cualquier $y \in \mathbb{R}$ y cualquier básico $B = \{0\} \times [y', +\infty)$ con $y' \leqslant y$, por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ existe $q \in \mathbb{Q} \cap [y', +\infty)$, por lo que $(0, q) \in B \cap Q \neq \varnothing$. Por tanto, $\overline{Q} = \{0\} \times \mathbb{R}$.

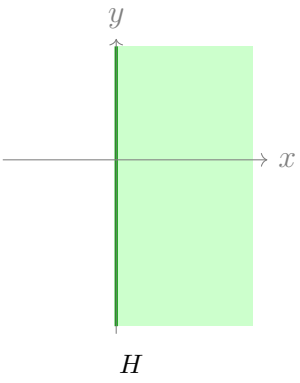
$\partial Q = \overline{Q} \setminus Q^\circ = \{0\} \times \mathbb{R}$.



c) $H = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$.
$H^\circ = H$.
Para cada $(x, y) \in H$ se tiene $x \geqslant 0$, luego el básico $B = \{x\} \times [y, +\infty)$ satisface $(x, y) \in B \subseteq H$. Así, H es abierto y $H^\circ = H$.

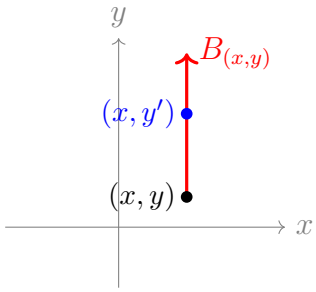
$\overline{H} = H$.
Su complementario es $\mathbb{R}^2 \setminus H = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$. Para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus H$ se cumple $x < 0$, luego $B = \{x\} \times [y, +\infty) \subseteq (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$. Por tanto, $\mathbb{R}^2 \setminus H$ es abierto, H es cerrado y $\overline{H} = H$.

$\partial H = \overline{H} \setminus H^\circ = \varnothing$.



d) Estudie si el espacio topológico $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ verifica las propiedades de separación T_1 y T_2 (Hausdorff), así como el primer axioma de numerabilidad (1AN) y el segundo axioma de numerabilidad (2AN).

- **Axiomas de separación (T_1 y T_2):** No es T_1 ni, por consiguiente, T_2. Tomemos dos puntos distintos en la misma vertical $(x, y), (x, y') \in \mathbb{R}^2$ con $y < y'$. Todo abierto $U \in \mathcal{T}$ tal que $(x, y) \in U$ contiene al básico $\{x\} \times [y, +\infty)$. Como $y < y'$, se tiene $(x, y') \in \{x\} \times [y, +\infty) \subseteq U$. Por tanto, no existe ningún abierto que contenga a (x, y) y deje fuera a (x, y'), lo que impide que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ sea T_1 (y tampoco T_2).



- **Primer axioma de numerabilidad (**1AN**):** Sí lo verifica.
  Para cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la familia unitaria $\mathcal{B}_{(x,y)} = \big\{\{x\} \times [y, +\infty)\big\}$ es una base de entornos finita (luego numerable) de (x, y), ya que dado cualquier abierto $U \in \mathcal{T}$ con $(x, y) \in U$, existe un básico $\{x\} \times [y', +\infty) \subseteq U$ con $y' \leqslant y$, y por tanto $\{x\} \times [y, +\infty) \subseteq \{x\} \times [y', +\infty) \subseteq U$.
- **Segundo axioma de numerabilidad (**2AN**):** No lo verifica.
  Por el apartado b), la recta horizontal $L = \mathbb{R} \times \{0\}$ es un subespacio discreto no numerable (tiene el cardinal de $\mathbb{R}$). Si $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ fuese 2AN, esta propiedad sería hereditaria y el subespacio $(L, \mathcal{T}_L)$ debería admitir una base numerable. Sin embargo, un espacio discreto solo es 2AN si es numerable, lo cual es una contradicción.